

# КУСОЧНО - ГЛАДКИЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ ОКРУЖНОСТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ИЗЛОМАМИ

А.А. Джалилов, Д. Майер, У.А. Сафаров

## 1. Введение

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности с несколькими изломами, т. е. отображения гладкие всюду, за исключением нескольких особых точек, в которых происходит скачок первой производной.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности  $f: f(x) = F(x)(\text{mod } 1)$ ,  $x \in S^1 = R^1/Z^1 \simeq [0, 1)$ . Предположим, что поднятие  $F(x)$  гомеоморфизма  $f$  удовлетворяет следующим условиям:

- (а) существуют точки  $b(1), b(2), \dots, b(k) \in S^1$ , такие, что в них определены  $F'(b(i) \pm 0) > 0$ , и  $F'(b(i) - 0)/F'(b(i) + 0) = \sigma_i(b(i), F) \neq 1$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;
- (б)  $F'(x)$  абсолютно-непрерывная функция на каждом связном компоненте множества  $S^1 \setminus \{b(i), i = \overline{1, k}\}$ ;
- (с)  $F''(x) \in L_1(S^1, d\ell)$ ;
- (д)  $\prod_{i=1}^k \sigma_i(b(i), F) \neq 1$ .

Точки  $b(1), b(2), \dots, b(k)$  называются **точками излома**, а числа  $\sigma_i = \sigma_i(b(i), F)$  **величинами излома** гомеоморфизма  $f$ . Смысл условий (а)-(с) состоит в том, что гомеоморфизм  $f$  является кусочно - гладким отображением имеющим особенности типа излома в точках  $b(i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Обозначим через  $\rho_f$  число вращения гомеоморфизма  $f$  т. е.  $\rho_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} F^n(x) (\text{mod } 1)$ ,  $x \in R^1$ . Здесь и далее  $F^n$  обозначает  $n$ -ую итерацию функции  $F$ . Пусть число вращения  $\rho_f$  иррационально. Данжуа доказал [1], что если  $F \in C^1(R^1)$  и  $\text{var}_{S^1} \ln F'(x) < \infty$ , тогда гомеоморфизм  $f$  топологически сопряжен линейному повороту  $f_\rho$ , т. е. существует гомеоморфизм окружности  $\varphi$ , такой, что  $\varphi \circ f = f_\rho \circ \varphi$ .

Этот классический результат Данжуа, без труда переносится на случай гомеоморфизмов с особенностями типа излома. Хорошо известно, что всякий гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения  $\rho_f$  обладает единственной вероятностной  $f$ -инвариантной мерой  $\mu_f$ . При этом сопряжение  $\varphi$  и инвариантная мера  $\mu_f$  связаны соотношением  $\varphi(x) = \mu_f([0, x])$ ,  $x \in S^1$  (см. напр. [2]). В силу последнего соотношения, инвариантная мера  $\mu_f$  является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега  $\ell$  тогда и только тогда, когда сопряжение  $\varphi$  задаётся абсолютно непрерывной функцией. Отметим, что вопрос о регулярности сопряжения для диффеоморфизмов окружности к настоящему времени хорошо изучен (см. напр. [3],[4],[5],[6],[7],[8],[9]).

Важным классом гомеоморфизмов окружности с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами. В работе Вул и Ханина [10] доказано, что ренормализации гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома  $x_b$  из класса  $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$ ,  $\varepsilon > 0$  аппроксимируются дробно-линейными отображениями. Если число вращения  $\rho_f$  иррационально, то вероятностные  $f$ -инвариантные меры  $\mu_f$  таких гомеоморфизмов сингулярны относительно меры Лебега  $\ell$  [11].

Кусочно-линейные (КЛ) гомеоморфизмы окружности с двумя изломами являются простейшими примерами гомеоморфизмов с двумя изломами. КЛ гомеоморфизмы

встречаются во многих других областях математики, например, в теории групп, в теории гомотопий и др. (в раб. [12]). Инвариантные меры КЛ гомеоморфизмов окружности с двумя изломами впервые изучались в работе Эрмана [13].

**Теорема 1.1** (см. [13]). *Инвариантная мера КЛ гомеоморфизма окружности  $f$  с двумя изломами и с иррациональным числом вращения абсолютно непрерывна относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда обе точки излома  $f$  лежат на одной траектории.*

Инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с двумя изломами "общего типа" т. е. не являющиеся кусочно-линейными изучались в работах [14] и [15]. Сформулируем основные результаты этих работ.

**Теорема 1.2** (см. [14]). *Пусть гомеоморфизм окружности  $f$  с поднятием  $F$  удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *число вращения  $\rho_f$  является иррациональным "ограниченного типа" т. е. последовательность элементов разложения  $\rho_f$  в непрерывную дробь ограничена;*

(2)  *$f$  имеет изломы в двух точках окружности  $b^{(1)}, b^{(2)}$  не лежащих на одной траектории;*

(3) *существует  $F'(x)$  на множестве  $S^1 \setminus \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ , и она удовлетворяет условиям Липшица на каждом связном компоненте множества  $S^1 \setminus \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ .*

*Тогда  $f$ -инвариантная мера  $\mu_f$  является сингулярной относительно меры Лебега  $\ell$ .*

В работе [15] изучаются гомеоморфизмы окружности с двумя изломами, но с произвольным иррациональным числом вращения.

**Теорема 1.3** (см. [15]). *Предположим, что гомеоморфизм окружности  $f$  с поднятием  $F$  удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *число вращения  $\rho_f$  иррационально;*

(2)  *$f$  имеет изломы в точках  $b^{(1)}$  и  $b^{(2)}$  и  $F'(x)$  абсолютно непрерывна на каждом связном компоненте множества  $S^1 \setminus \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ ;*

(3)  *$F''(x) \in L_1(S^1, d\ell)$ ;*

(4) *произведение величин изломов нетривиально т. е.  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \neq 1$ .*

*Тогда вероятностная  $f$ -инвариантная мера  $\mu_f$  сингулярна относительно меры Лебега.*

Настоящая работа является продолжением работ [14], [15] и в определенном смысле дополняет их результаты.

Сформулируем основной результат нашей работы.

**Теорема 1.4.** *Пусть поднятие  $F$  гомеоморфизма окружности  $f$  с  $k$  изломами удовлетворяет условиям (a)-(d) и число вращения  $\rho_f$  иррационально. Тогда вероятностная  $f$ -инвариантная мера  $\mu_f$  сингулярна относительно меры Лебега  $\ell$  на окружности  $S^1$ .*

Отметим, что вопрос о регулярности инвариантной меры гомеоморфизмов окружности с  $k$ ,  $k \geq 2$  изломами не лежащих на одной траектории и с тривиальным произведением изломов т. е.  $\prod_{i=1}^k \sigma_i = 1$ , в случае числа вращения "неограниченного типа" остаётся открытым.

## 2. Необходимые определения и факты

Порядок на окружности  $S^1$  определяется при помощи ориентации на ней. Пусть  $a, b, c \in S^1$ . Мы скажем, что  $a \prec b \prec c$ , если при движении от точки  $a$  в положительном направлении сперва достигается точка  $b$ , а потом  $c$ .

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности  $f$  с иррациональным числом вращения  $\rho_f$ . Обозначим через  $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$  последовательность элементов разложения числа вращения  $\rho_f$  в непрерывную дробь т. е.  $\rho_f = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ . Положим  $p_n/q_n = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ,  $n \geq 1$ . Числа  $p_n/q_n$  называются **конечными дробями** для  $\rho_f$ , а  $q_n$  — **временами первого возвращения**. Числа  $q_n$  удовлетворяют разностному уравнению  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , с начальными условиями  $q_0 = 1$  и  $q_1 = a_1$ . Для произвольной точки  $x_0 \in S^1$  обозначим через  $\Delta_0^{(n)}(x_0)$  замкнутый отрезок, концами которого служат точки  $x_0$  и  $x_{q_n} = f^{q_n}(x_0)$ . Заметим, что при нечётном  $n$  точка  $x_{q_n}$  лежит слева от  $x_0$ , а при чётном  $n$  — справа. Положим  $\Delta_i^{(n)} = f^i(\Delta_0^{(n)})$ ,  $i \geq 1$ .

**Лемма 2.1** (см. [16]). *Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in S^1$ . Отрезок траектории этой точки  $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$  разбивает окружность на непересекающиеся (за исключением концевых точек) отрезки:  $\Delta_i^{(n)}$ ,  $0 \leq i \leq q_{n-1} - 1$ ,  $\Delta_i^{(n-1)}$ ,  $0 \leq i \leq q_n - 1$ .*

Полученное разбиение обозначим через  $\xi_n(x_0)$  и назовём **динамическим разбиением  $n$ -го порядка**. Опишем теперь процесс перехода от  $\xi_n(x_0)$  к  $\xi_{n+1}(x_0)$ . Все отрезки  $\Delta_j^{(n)}(x_0)$ ,  $0 \leq j \leq q_{n-1} - 1$ , сохраняются, а каждый из отрезков  $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$ , разбивается на  $(a_{n+1} + 1)$  отрезков:  $\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{a_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0)$ .

**Лемма 2.2.** *Рассмотрим гомеоморфизм окружности  $f$  с поднятием  $F$  и с иррациональным числом вращения. Пусть в точках  $b(i) \in S^1$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $b(1) \prec b(2) \prec \dots \prec b(k)$ , существуют конечные односторонние производные  $F'(b(i) \pm 0) > 0$ ,  $F \in C^1([b(i), b(i+1)]])$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $b(k+1) = b(1)$  и  $\sum_{i=1}^k \text{var}_{[b(i), b(i+1)]} \ln F' = \bar{v} < \infty$ .*

*Положим  $v = \bar{v} + \sum_{i=1}^k \left| \ln F'(b(i) - 0) - \ln F'(b(i) + 0) \right|$ . Тогда для любого  $y_0$ , такого, что  $f^s(y_0) \notin \{b(i), i = \overline{1, k}\}$ ,  $0 \leq s < q_n$ , справедливо неравенство*

$$e^{-v} \leq \prod_{s=0}^{q_n-1} F'(y_s) \leq e^v.$$

Полезные неравенства называются **неравенствами Данжуа**. Лемма 2.2. доказывалась так же, как и аналогичное утверждение для диффеоморфизмов (см. [6]). Из леммы 2.2. следует, что отрезки составляющие динамическое разбиение  $\xi_n(x_0)$ , имеют экспоненциально малую длину. Обозначим  $\lambda = (1 + e^{-v})^{-\frac{1}{2}} < 1$ .

**Следствие 2.1.** *Пусть  $\Delta^{(n)}$  — произвольный элемент динамического разбиения  $\xi_n(x_0)$ . Тогда*

$$\ell(\Delta^{(n)}) \leq \text{const} \lambda^n. \quad (2.1)$$

**Теорема Данжуа.** (см. [6]). *Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда гомеоморфизм  $f$  топологически сопряжен линейному повороту  $f_\rho$ .*

**Определение 2.1.** Пусть константа  $K > 1$ . Интервалы  $I_1$  и  $I_2$  называются  $K$ -соизмеримыми на  $S^1$ , если справедливо неравенства  $K^{-1}\ell(I_2) \leq \ell(I_1) \leq K\ell(I_2)$ .

Следуя работе [5] введем следующее определение.

**Определение 2.2.** Отрезок  $I = [\tau, t] \subset S^1$  называется " $q_n$ -маленьким", и его концевые точки " $q_n$ -близкими", если отрезки  $f^i(I)$ ,  $0 \leq i \leq q_n - 1$ , взаимно не пересекаются (за исключением концевых точек).

Из структуры динамических разбиений вытекает, что отрезок  $I = [\tau, t]$  является " $q_n$ -маленьким" только и только тогда, когда или  $t < \tau < f^{q_n-1}(t)$ , или  $f^{q_n-1}(\tau) < t < \tau$ .

**Лемма 2.3.** Предположим, что гомеоморфизм  $f$  с поднятием  $F$  удовлетворяет условиям леммы 2.2. Пусть точки  $x, y \in S^1$  являются " $q_n$ -близкими" и  $f^s(x), f^s(y) \in \{b(i), i = \overline{1, k}\}$ ,  $0 \leq s < q_n$ . Тогда для любого  $0 \leq k \leq q_n$  справедливо следующее неравенство:

$$| \ln(f^k(x))' - \ln(f^k(y))' | \leq v. \quad (2.2)$$

**Доказательство леммы 2.3.** Пусть  $I = (x, y)$ ,  $x < y$  и  $0 \leq k \leq q_n - 1$ . Интервалы  $f^i(I)$ ,  $0 \leq i \leq q_n - 1$ , не пересекаются. Отсюда легко следует, что  $| \ln(f^k(x))' - \ln(f^k(y))' | \leq \sum_{j=0}^{k-1} | \ln f'(f^j(x)) - \ln f'(f^j(y)) | \leq v$ . Лемма 2.3 доказана.

В дальнейшем важную роль играет понятие двойных отношений (**Cross - ratio**).

**Определение 2.3 .** Двойным отношением четверки чисел  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ,  $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$  называется число

$$Cr(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}.$$

**Определение 2.4.** Пусть задана четверка чисел  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ,  $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$  и строго возрастающая функция  $F: R^1 \rightarrow R^1$ . Искажением двойных отношений называется

$$Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; F) = \frac{Cr(F(z_1), F(z_2), F(z_3), F(z_4))}{Cr(z_1, z_2, z_3, z_4)}.$$

Пусть  $m \geq 3$ ,  $z_i \in S^1$ ,  $i = \overline{1, m}$  и  $z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_m \prec z_1$  (в смысле порядка на окружности). Определим  $\hat{z}_1 = z_1$  и

$$\hat{z}_i = \begin{cases} z_i, & \text{если } z_1 < z_i < 1, \\ 1 + z_i, & \text{если } 0 < z_i < z_1. \end{cases}$$

при  $i = \overline{2, m}$ . Очевидно, что  $\hat{z}_1 < \hat{z}_2 < \dots < \hat{z}_m$ . Вектор  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_m)$  называется **производным вектором** от  $(z_1, z_2, \dots, z_m) \in (S^1)^m$ .

Пусть  $f$  гомеоморфизм окружности с поднятием  $F$ . Определим двойные отношения гомеоморфизма  $f$  от четверки  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ ,  $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$  относительно  $f$ :  $Cr(z_1, z_2, z_3, z_4; f) = Cr(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4; F)$  где  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ - производный вектор четверки  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

Хорошо известно [17], что если  $f \in C^{2+\nu}([z_1, z_4])$ ,  $\nu > 0$ ,  $[z_1, z_4] \subset S^1$ , то

$$Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f) = 1 + O(|\hat{z}_4 - \hat{z}_1|^{1+\nu}).$$

Теперь приведем два утверждения из работы [15], относящиеся искажениям двойных отношений для гомеоморфизмов окружности удовлетворяющих условиям теоремы 1.4.

Пусть гомеоморфизм окружности  $f$  с поднятием  $F$  удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $F'' \in L_1(S^1, d\ell)$ , ее можно написать в виде:

$$F''(\hat{x}) = g_\varepsilon(\hat{x}) + \theta_\varepsilon(\hat{x}), \quad \hat{x} \in R^1 \quad (2.3)$$

где  $g_\varepsilon(\hat{x})$ ,  $\theta_\varepsilon(\hat{x})$  периодические функции на  $R^1$  с периодом 1,  $g_\varepsilon(\hat{x})$  непрерывна на  $[0, 1]$  и  $\int_0^1 |\theta_\varepsilon| d\ell < \varepsilon$ .

**Теорема 2.1.** *Предположим, что гомеоморфизм окружности  $f$  с поднятием  $F$  удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Пусть  $z_i \in S^1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$  и отрезок  $[z_1, z_4]$  не содержит ни одну точку излома  $f$ . Тогда*

$$\begin{aligned} |Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f) - 1| &\leq C_1 |\hat{z}_4 - \hat{z}_1| \max_{\hat{x}, \hat{t} \in [\hat{z}_1, \hat{z}_4]} |g_\varepsilon(\hat{x}) - g_\varepsilon(\hat{t})| + \\ &+ C_1 \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_4} |\theta_\varepsilon(y)| dy + C_1 \left( \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_4} |F''(y)| dy \right)^2, \end{aligned}$$

где константа  $C_1 > 0$  зависит только от  $f$ , а  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$  производный вектор от четверки  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

Теперь рассмотрим случай, когда отрезок  $[z_1, z_4]$  содержит только одну точку излома  $x = x_b$ . Более точно, пусть  $x_b$  лежит вне среднего отрезка, т. е.  $x_b \in [z_1, z_2]$ . Для определенности предположим, что  $x_b \in [z_1, z_2]$ .

Пусть  $z_i \in S^1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4$  и  $x_b \in [z_1, z_2]$ . Обозначим через  $\sigma(x_b)$  величину излома  $f$  в точке  $x_b$ . Определим числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $\xi$  и  $z$  следующим образом:

$$\alpha := \hat{z}_2 - \hat{z}_1, \quad \beta := \hat{z}_3 - \hat{z}_2, \quad \gamma := \hat{z}_4 - \hat{z}_3, \quad \tau := \hat{z}_2 - \hat{x}_b, \quad \xi := \frac{\beta}{\alpha}, \quad z := \frac{\tau}{\alpha}. \quad (2.4)$$

где  $(\hat{z}_1, \hat{x}_b, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$  производный вектор от  $(z_1, x_b, z_2, z_3, z_4)$ .

В дальнейшем нам необходима следующая

**Лемма 2.4.** *Предположим, что гомеоморфизм окружности  $f$  с поднятием  $F$  удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Тогда*

$$\left| Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f) - \frac{[\sigma(x_b) + (1 - \sigma(x_b))z](1 + \xi)}{\sigma(x_b) + (1 - \sigma(x_b))z + \xi} \right| \leq C_2 \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_4} |F''(y)| dy, \quad (2.5)$$

где константа  $C_2 > 0$  зависит только от  $f$ .

### 3. Теорема о покрывающих интервалах для гомеоморфизмов окружности с изломами

Рассмотрим гомеоморфизм окружности  $f \in C^1(S^1 \setminus \{b(1), b(2), \dots, b(k)\})$  с  $k$  точками излома  $b(i)$ ,  $1 \leq i \leq k$  и с иррациональным числом вращения  $\rho_f$ . Положим  $B(f) = \{b(1), b(2), \dots, b(k)\}$ .

Мы введем понятие "правильного" покрытия точек изломов из множества  $B(f)$ . Пусть  $z_i \in S^1$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$  и  $r_n$  принимает значение из множества  $\{q_{n-1}, q_n, q_{n-1} + q_n\}$ . Предположим, что  $[z_1, z_4]$  " $r_n$ -маленький" т. е. интервалы  $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq r_n - 1\}$ , попарно непересекаются. Пусть система отрезков  $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq r_n - 1\}$  покрывает элементы некоторого непустого подмножества  $\hat{B} \subset B(f)$ . Число элементов подмножества  $\hat{B}$  обозначим  $m$ . Для каждого элемента  $b(i_s) \in \hat{B}$  существует число  $l_{i_s}$ ,  $0 \leq l_{i_s} \leq r_n - 1$ , такое, что  $\bar{b}^{(n)}(i_s) =$

$f^{-i_s}(b(i_s)) \in [z_1, z_4]$ . Точка  $\bar{b}^{(n)}(i_s)$ -называется " $r_n$ -прообразом" элемента  $b(i_s)$  в  $[z_1, z_4]$ . Множество " $r_n$ -прообразов" элементов  $\hat{B}$  тоже состоит из  $m$  элементов и их перенумеруем:  $\bar{b}^{(n)}(i_1), \bar{b}^{(n)}(i_2), \dots, \bar{b}^{(n)}(i_m)$ . Положим  $\bar{b}^{(n)}(i_t) = \max\{\bar{b}^{(n)}(i_1), \bar{b}^{(n)}(i_2), \dots, \bar{b}^{(n)}(i_m)\}$ ,  $1 \leq t \leq m$ .

Теперь для каждого  $j$ ,  $0 \leq j \leq r_n - 1$  введем следующие обозначения:

$$\xi(j) = \frac{\ell([f^j(z_2), f^j(z_3)])}{\ell([f^j(z_1), f^j(z_2)])}, \quad z^{(i_s)}(j) = \frac{\ell([f^j(\bar{b}^{(n)}(i_s)), f^j(z_2)])}{\ell([f^j(z_1), f^j(z_2)])}. \quad (3.1)$$

Если  $\bar{b}^{(n)}(i_s) \in [z_1, z_2]$ , то числа  $z^{(i_s)}(j)$  называются нормированными координатами  $f^j(\bar{b}^{(n)}(i_s))$ . Когда точка  $\bar{b}^{(n)}(i_s)$  движется от  $z_2$  к  $z_1$  нормированные координаты  $z^{(i_s)}(j)$  меняются от 0 до 1. Из леммы 2.3 следует, что

$$e^{-v}\xi(0) \leq \xi(j) \leq e^v\xi(0), \quad e^{-v}z^{(i_s)}(0) \leq z^{(i_s)}(j) \leq e^v z^{(i_s)}(0), \quad i = \overline{1, k} \quad (3.2)$$

для всех  $1 \leq j \leq r_n - 1$ .

**Определение 3.1.** Пусть  $K > M \geq 1$ ,  $\zeta \in (0, 1)$ ,  $\delta > 0$  постоянные числа,  $n$ -натуральное число и  $x_0 \in S^1$ . Мы скажем, что тройка отрезков  $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ ,  $z_i \in S^1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , " $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно" покрывает точки излома подмножества  $\hat{B}$ , если для некоторого  $r_n \in \{q_{n-1}, q_n, q_n + q_{n-1}\}$  выполняются следующие условия:

1)  $[z_1, z_4] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , и система отрезков  $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq r_n - 1\}$  покрывает каждую точку  $\hat{B}$  только один раз;

2)  $z_2 = \bar{b}^{(n)}(i_t)$  для некоторого  $t$ ,  $1 \leq t \leq m$  и  $\bar{b}^{(n)}(i_s) \in [z_1, z_2]$ ,  $1 \leq s \leq m$ ,  $s \neq t$ ;

3)  $M\ell([z_2, z_3]) \leq \ell([z_1, z_2]) \leq K\ell([z_2, z_3])$ ,  $K^{-1}\ell([z_3, z_4]) \leq \ell([z_2, z_3]) \leq K\ell([z_3, z_4])$ ;

4) длины отрезков  $f^{r_n}([z_1, z_2])$ ,  $f^{r_n}([z_2, z_3])$  и  $f^{r_n}([z_3, z_4])$  попарно  $K$ -соизмеримы;

5)  $\max\{\ell([f^{r_n}(z_i), x_0]), \ell([z_i, x_0]), i = 1, 2, 3, 4\} \leq K\ell([z_1, z_2])$ ;

6)  $\max_{1 \leq s \leq m} \{z^{(i_s)}(0)\} < \zeta$ .

**Определение 3.2.** Подмножество особых точек  $\hat{B} \subset \{b(1), b(2), \dots, b(n)\}$  гомеоморфизма  $f$  называется нетривиальным, если  $\prod_{b \in \hat{B}} \sigma(b, F) \neq 1$ .

Теперь сформулируем теорему о покрывающих интервалах, которая играет ключевую роль при доказательстве теоремы 1.4.

**Теорема 3.1.** Предположим, что гомеоморфизм  $f$  удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Пусть  $x_0 \in S^1$  и  $M \geq 1$ ,  $\delta, \zeta \in (0, 1)$  — постоянные числа. Тогда существует такая константа  $K = K(f, M, \zeta)$ , что для любого достаточно большого  $n$  существуют нетривиальное подмножество  $\hat{B} = \hat{B}(n) = \{b(i_1), b(i_2), \dots, b(i_m)\}$ , точки  $z_i \in S^1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec z_4 \prec z_1$  и число  $r_n = r_n(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \{q_{n-1}, q_n, q_n + q_{n-1}\}$  такие, что отрезки  $[z_s, z_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, 3$  " $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно" покрывают точки  $\hat{B}$ .

**Доказательство теоремы 3.1.** Пусть  $x_0 \in S^1$ . Рассмотрим динамическое разбиение  $\xi_n(x_0)$ . Для определенности предположим, что  $n$ -нечетное число. Тогда  $x_{q_n} \prec x_0 \prec$

$x_{q_n-1}$ . Из структуры динамического разбиения следует, что  $\bar{b}^{(n)}(i) = f^{-l_i}(b(i))$ ,  $i = \overline{1, k}$ , для некоторых однозначно определенных чисел  $l_i \in [0, q_n)$ . Заметим, что  $l_i \in [0, q_n)$ , если  $\bar{b}^{(n)}(i) \in [x_0, x_{q_n-1}]$ , и  $l_i \in [0, q_{n-1})$ , если  $\bar{b}^{(n)}(i) \in [x_{q_n}, x_0]$ . Точки  $\bar{b}^{(n)}(i)$ ,  $i = \overline{1, k}$  назовем " $q_n$ -прообразами" особых точек  $b(i)$ . Заметим, что " $q_n$ -прообразы" особых точек лежащих на одной траектории могут совпадать.

Положим  $B_k^{(n)} = \{x_{q_n}, x_0, x_{q_n-1}, \bar{b}^{(n)}(i), i = \overline{1, k}\}$ ,  $d_n = \ell([x_{q_n}, x_{q_n-1}])$ ,

Теперь при помощи констант  $M > 1$ ,  $\zeta \in (0, 1)$  и полной вариации  $v$  функции  $\ln F'$  определим число  $m_0 : m_0 = \max\{k + 4, [M\zeta^{-1}] + 1, [e^v] + 1\}$ , где  $[\cdot]$  обозначает целую часть.

Для каждого  $l \geq 0$  определим разбиение  $D_l^{(n)}$  отрезка  $[x_{q_n}, x_{q_n-1}]$  при помощи точек  $t_s = x_{q_n} + m_0^{-(l+1)} d_n s$ ,  $s = 0, 1, \dots, m_0^{l+1}$ . Очевидно, что длина каждого отрезка  $I_l^{(n)}$  разбиения  $D_l^{(n)}$  равна  $m_0^{-(l+1)} d_n$ . При переходе от  $D_l^{(n)}$  к  $D_{l+1}^{(n)}$  каждый отрезок разбиения  $D_l^{(n)}$  разбивается на  $m_0$  отрезков  $D_{l+1}^{(n)}$ . Отрезок разбиения  $D_l^{(n)}$  не содержащий ни одного элемента  $B_k^{(n)}$  называется " $l^{(n)}$ -пустым" отрезком. Поскольку число отрезков разбиения  $D_0^{(n)}$  больше чем число элементов  $B_k^{(n)}$ , существует хотя бы один " $0^{(n)}$ -пустой" отрезок. Кроме того, каждый " $l^{(n)}$ -занятый" отрезок разбиения  $D_l^{(n)}$  содержит хотя бы один " $(l+1)^{(n)}$ -пустой" отрезок разбиения  $D_{l+1}^{(n)}$ . Отметим, что левый и правый крайние отрезки разбиения  $D_l^{(n)}$  содержат  $x_{q_n}$  и  $x_{q_n-1}$ , соответственно. Это означает, что эти два крайних отрезка при любом  $l \geq 0$  являются " $l^{(n)}$ -занятыми". Выбросим из отрезка  $[x_{q_n}, x_{q_n-1}]$  все " $l^{(n)}$ -пустые" отрезки. Мы получим естественное разбиение подмножества  $B_k^{(n)}$  на непустые, непересекающиеся группы. Возникшее разбиение подмножества  $B_k^{(n)}$  обозначим через  $G_l^{(n)}$ .

Обозначим  $|A|$  число элементов конечного множества  $A$ . Нам необходима следующая

**Лемма 3.1.** Пусть  $r$ -натуральное число. Тогда существует число  $s_0 = s_0(r, n)$ ,  $0 \leq s_0 \leq r(k+1)$ , такое, что  $|G_{s_0}^{(n)}| = |G_{s_0+r}^{(n)}|$ .

**Доказательство леммы 3.1.** Рассмотрим разбиения  $D_0^{(n)}, D_r^{(n)}, \dots, D_{r(k+1)}^{(n)}$  и порожденные ими разбиения  $G_0^{(n)}, G_r^{(n)}, \dots, G_{r(k+1)}^{(n)}$  множества  $B_k^{(n)}$ . Из структуры разбиений  $G_l^{(n)}$  следует, что  $|G_l^{(n)}| \leq |G_{l+1}^{(n)}|$ , при любом  $l \geq 0$ . В частности,  $|G_0^{(n)}| \leq |G_r^{(n)}| \leq \dots \leq |G_{r(k+1)}^{(n)}|$ . В последней цепочке неравенств возможны два случая. При некотором  $t_0 = t_0(n)$ ,  $0 \leq t_0 \leq k$ , справедливо равенство  $|G_{rt_0}^{(n)}| = |G_{r(t_0+1)}^{(n)}|$  или  $|G_0^{(n)}| < |G_r^{(n)}| < \dots < |G_{r(k+1)}^{(n)}|$ . В первом случае положим  $s_0 = rt_0$ . Предположим, что  $|G_0^{(n)}| < |G_r^{(n)}| < \dots < |G_{r(k+1)}^{(n)}|$ . Отсюда, учитывая  $|G_0^{(n)}| \geq 2$ , получим, что  $|G_{r(k+1)}^{(n)}| \geq k+3$ . С другой стороны  $|G_{r(k+1)}^{(n)}| \leq |B_k^{(n)}| = k+3$ . Следовательно  $|G_{r(k+1)}^{(n)}| = k+3$  т. е. число элементов разбиения  $G_{r(k+1)}^{(n)}$  совпадает с числом элементов  $B_k^{(n)}$ . Другими словами каждое подмножество разбиения  $G_{r(k+1)}^{(n)}$  содержит только один элемент  $B_k^{(n)}$ . Отсюда следует, что  $|G_s^{(n)}| = k+3$  при всех  $s \geq r(k+1)$ . В качестве  $s_0$  можно взять  $r(k+1)$ . Из построения видно, что число  $s_0$  зависит от  $n$ , но не превосходит  $r(k+1)$ . Лемма 3.1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы 3.1. Для доказательства теоремы 3.1 нам будет достаточно воспользоваться утверждением леммы 3.1 при  $r = 9$ . Положим  $s_0 = s_0(9, n)$ . По условию теоремы 1.4 произведение величин изломов гомеоморфизма  $f$  нетривиально, т. е.  $\prod_{i=1}^k \sigma(b^{(i)}, F) \neq 1$ . Тогда найдется хотя бы одно подмножество

$\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \in G_{s_0}^{(n)}$ , такое, что произведение величин изломов особых точек с " $q_n$ -прообразами" в  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  (которое обозначим через  $\sigma(\tilde{E}_{s_0}^{(n)})$ ) не равно 1.

Для подмножества  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  возможны следующие три случая:

I. Подмножество  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  не содержит ни одного элемента  $\{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\}$ ;

II.  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  содержит только один элемент множества  $\{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\}$ ;

III.  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  содержит только два элемента множества  $\{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\}$ , а именно  $x_{q_n}$  и  $x_0$ . Позже покажем, что случай  $\{x_0, x_{q_{n-1}}\} \subset \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  невозможен.

Утверждение теоремы 3.1 докажем для каждого случая отдельно.

**I случай.** Пусть  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \cap \{x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}\} = \emptyset$ . Тогда или  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_{q_n}, x_0)$ , или  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_0, x_{q_{n-1}})$ . Пусть для определенности  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_0, x_{q_{n-1}})$ . Случай  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} \subset (x_{q_n}, x_0)$  рассматривается аналогично.

Из утверждения леммы 3.1 можно вывести, что подмножество  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  покрывается одним или двумя отрезками разбиения  $D_{s_0}^{(n)}$ . Объединение отрезков разбиения  $D_{s_0}^{(n)}$  покрывающих  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  обозначим через  $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$ . Точно так же можно определить отрезки  $\tilde{J}_{s_0+p}^{(n)}$ ,  $0 \leq p \leq 9$ . Ясно, что  $\tilde{J}_{s_0}^{(n)} \supset \tilde{J}_{s_0+1}^{(n)} \dots \supset \tilde{J}_{s_0+9}^{(n)}$ . Из утверждения леммы 3.1 вытекает, что к отрезку  $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$  слева и справа примыкают два " $s_0^{(n)}$ -пустых" отрезка разбиения  $D_{s_0}^{(n)}$  лежащие внутри интервала  $(x_0, x_{q_{n-1}})$ . Эти два отрезка обозначим через  $L_{s_0}^{(n)}$  и  $R_{s_0}^{(n)}$ , соответственно.

Положим  $\bar{b}_{s_0}^{(n)} = \max \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ . Теперь определим точки  $z_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  следующим образом:

$$z_1 = \bar{b}_{s_0}^{(n)} - d_n m_0^{-(s_0+7)}, \quad z_2 = \bar{b}_{s_0}^{(n)}, \quad z_3 = \bar{b}_{s_0}^{(n)} + d_n m_0^{-(s_0+6)}, \quad z_4 = \bar{b}_{s_0}^{(n)} + d_n m_0^{-(s_0+6)} + d_n \cdot m_0^{-(s_0+7)}.$$

Теперь проверим, что отрезки  $[z_s, z_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, 3$ , удовлетворяют условиям "правильного" покрытия.

Длина отрезка  $\tilde{J}_{s_0+9}^{(n)}$  покрывающего подмножества  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  не превосходит  $2d_n m_0^{-(s_0+9)}$ . А длины соседних к  $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$  отрезков  $L_{s_0}^{(n)}$  и  $R_{s_0}^{(n)}$  равны  $d_n \cdot m_0^{-s_0}$ . Точка  $z_2 = \bar{b}_{s_0}^{(n)}$  принадлежит отрезку  $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}$ . Используя определения точек  $z_1, z_2, z_3, z_4$  получим, что  $\ell([z_1, z_2]) = m_0^{-7} \ell(L_{s_0}^{(n)})$ ,  $\ell([z_2, z_4]) = (m_0 + 1) m_0^{-7} \ell(R_{s_0}^{(n)})$ . Отсюда следует, что  $[z_1, z_4] \subset L_{s_0}^{(n)} \cup \tilde{J}_{s_0}^{(n)} \cup R_{s_0}^{(n)} \subset (x_0, x_{q_{n-1}})$ . Поскольку отрезок  $[x_0, x_{q_{n-1}}]$  является " $q_n$ -маленьким", отрезки  $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq q_n - 1\}$  попарно не пересекаются и только один раз покрывают особые точки с " $q_n$ -прообразами" в  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ .

Легко можно проверить, что отрезки  $[z_s, z_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, 3$  удовлетворяют второму условию "правильного" покрытия. В силу неравенства Данжуа отрезки  $[x_{q_n}, x_0]$  и  $[x_0, x_{-q_n}]$  являются  $e^v$ -соизмеримыми. Отсюда, учитывая  $[x_0, x_{-q_n}] \subset [x_0, x_{q_{n-1}}]$  получаем:

$$\frac{\ell([x_{q_n}, x_{q_{n-1}}])}{\ell([x_0, x_{q_{n-1}}])} \leq \frac{\ell([x_{q_n}, x_0]) + \ell([x_0, x_{q_{n-1}}])}{\ell([x_0, x_{q_{n-1}}])} \leq 1 + e^v.$$

Очевидно, что  $\frac{\ell([x_{q_n}, x_{q_{n-1}}])}{\ell([x_0, x_{q_{n-1}}])} > 1 > (1 + e^v)^{-1}$ . Таким образом отрезки  $[x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$  и  $[x_0, x_{q_{n-1}}]$  являются  $(1 + e^v)$ -соизмеримыми. Отсюда, используя  $\ell([z_1, z_4]) = (m_0 + 2) m_0^{-(s_0+7)} d_n$  получим, что  $[z_1, z_4]$  и  $[x_0, x_{q_{n-1}}]$  являются  $(m_0 + 2)^{-1} m_0^{(s_0+7)} (1 + e^v)^{-1}$ -соизмеримыми. Положим  $K = \sup_n \max\{m_0 e^{2v}, m_0^{s_0+7}\}$ . В силу утверждения леммы 3.1  $s_0 = s_0(9, n) \leq 9(k + 1)$ ,  $\forall n \in N$ . Следовательно  $K = \max\{m_0 e^{2v}, m_0^{9k+16}\}$ . Учитывая  $m_0 > M$  легко убедиться, что отрезки  $[z_s, z_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, 3$  удовлетворяет третьему условию "правильного" покрытия с константой  $K$ . В силу неравенства Данжуа отрезки  $[z_s, z_{s+1}]$  и



$[f^{q_n}(z_s), f^{q_n}(z_{s+1})]$  при каждом  $s = 1, 2, 3$  являются  $e^v$ -соизмеримыми. Отсюда, а также из  $\ell([z_s, z_{s+1}]) = d_n \cdot m_0^{-(s_0+7)}$ ,  $s = 1, 3$  и  $\ell([z_2, z_3]) = d_n \cdot m_0^{-(s_0+6)}$  следует, что отрезки  $[f^{q_n}(z_s), f^{q_n}(z_{s+1})]$ ,  $s = 1, 2, 3$  удовлетворяют четвертому условию "правильного" покрытия с константой  $K$ .

Заметим, что точки  $z_i$ ,  $f^{q_n}(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  принадлежат отрезку  $[x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$ . Очевидно, что

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \ell([z_i, x_0]), \max_{1 \leq i \leq 4} \ell([f^{q_n}(z_i), x_0]) \leq \ell([x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]) = d_n.$$

Из явного вида длины отрезка  $\ell([z_1, z_2])$ , следует, что  $d_n = m_0^{s_0+7} \ell([z_1, z_2])$ . Отсюда видно, что  $[z_s, z_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, 3$  удовлетворяют пятому условию "правильного" покрытия с константой  $K$ . Проверим, что  $[z_s, z_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, 3$  удовлетворяют последнему условию "правильного" покрытия.

Из определения точек  $z_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$  вытекает, что

$$\max_{i: b^{(n)}(i) \in \tilde{E}_{s_0}^{(n)}} \frac{\ell([b^{(n)}(i), z_2])}{\ell([z_1, z_2])} \leq \frac{d_n \cdot m_0^{-(s_0+8)}}{d_n \cdot m_0^{-(s_0+7)}} = m_0^{-1} < \zeta.$$

**II случай.** Обозначим через  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ ,  $E_{s_0}^{(n)}(x_0)$  и  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  подмножества из  $G_{s_0}^{(n)}$  содержащие  $x_{q_n}$ ,  $x_0$  и  $x_{q_{n-1}}$ , соответственно. В силу предположения  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  совпадает только с одним из них и эти подмножества попарно непересекаются. Заметим, что если найдется хотя бы одно нетривиальное подмножество  $E_{s_0}^{(n)}$  отличное от них, то мы приходим к первому случаю. Пусть все подмножества ранга  $s_0$  не содержащие точки  $x_{q_n}$ ,  $x_0$ ,  $x_{q_{n-1}}$  тривиальные. Отсюда, учитывая  $\sigma(B(F)) \neq 1$  получим, что  $\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_0))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})) \neq 1$ .

Обозначим через  $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$  и  $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  отрезки  $s_0$ -го ранга покрывающие  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$  и  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ , соответственно. В силу леммы 3.1 к отрезку  $\tilde{J}_{s_0}^{(n)}(x_0)$  с обеих сторон примыкают " $s_0^{(n)}$ -пустые" отрезки длины  $d_n m_0^{-s_0}$ .

Теперь рассмотрим подмножество  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}) = f^{-q_n}(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})) \cup E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cup f^{-q_{n-1}}(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}))$ . Используя неравенство Данжуа получим, что  $\ell(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}))$ ,  $\ell(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) \leq e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}$ . Имеем, также  $\ell(E_{s_0}^{(n)}(x_0)) \leq 2e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}$ . Отсюда следует, что  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}) \subset (x_0 - 2e^v d_n m_0^{-(s_0+9)}, x_0 + 2e^v d_n m_0^{-(s_0+9)})$ . Определим точки  $z_i$ ,  $i = 1, 4$ , по формулам:

$$z_2 = \max E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}}), z_1 = z_2 - d_n m_0^{-(s_0+6)}, z_3 = z_2 + d_n m_0^{-(s_0+3)}, z_4 = z_2 + d_n m_0^{-(s_0+3)} + d_n m_0^{-(s_0+6)}.$$

Поскольку  $z_2$  есть максимальная точка  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}})$ , а длина отрезка  $[z_1, z_4]$  равна  $2d_n(m_0^{-(s_0+3)} + m_0^{-(s_0+6)})$ , концевые точки  $z_1$  и  $z_4$  не выходят за пределы соседних " $s_0^{(n)}$ -пустых" отрезков.

Построенная тройка отрезков  $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$  " $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно" покрывает точки нетривиального подмножества  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}})$  с  $r_n = q_n + q_{n-1}$ .

Мы лишь проверим, что система отрезков  $\{f^j([z_1, z_4]), 0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1\}$  покрывает каждую точку  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n}, x_0, x_{q_{n-1}})$  только один раз. А остальные условия правильного покрытия связанные с длинами отрезков проверяются путём простых вычислений как в первом случае.

Отрезок  $[z_1, z_4]$  разобьём на две части:  $[z_1, z_4] = [z_1, x_0] \cup (x_0, z_4]$ . Покажем, что отрезки  $f^j([z_1, x_0])$ ,  $0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1$  покрывают точки излома  $f$  с " $q_{n-1}$ -прообразами" в  $E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cap [z_1, x_0]$  и " $q_n$ -прообразами" в  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  только один раз. Поскольку  $[z_1, x_0] \subset$

$[x_{q_n}, x_0]$ , отрезки  $f^j([z_1, x_0])$ ,  $0 \leq j \leq q_{n-1} - 1$ , покрывают каждую точку излома  $f$  с " $q_n$ -прообразами" в  $[z_1, x_0] \cap E_{s_0}^{(n)}(x_0)$  только один раз.

Из утверждения леммы 3.1 следует, что слева от отрезка  $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$  находится " $s_0$ -пустой" отрезок. Длина отрезка  $f^{q_{n-1}}([z_1, x_0]) = [f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$  в силу неравенства Данжуа не больше чем  $e^v \ell([z_1, x_0])$ . Легко проверить, что последнее число меньше чем сумма длин отрезков  $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  и соседнего " $s_0^{(n)}$ -пустого". Другими словами отрезок  $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$  покрывается  $I_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  и его " $s_0^{(n)}$ -пустым" соседним отрезком. Ясно, что подмножество " $q_n$ -прообразов" точек изломов  $f$  лежащие в  $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$  совпадает с  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ . Поскольку  $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}] \subset [x_0, x_{q_n}]$ , отрезки  $f^i([f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}])$ ,  $0 \leq i \leq q_n - 1$  только один раз покрывают точки излома с " $q_n$ -прообразами" в  $[f^{q_{n-1}}(z_1), x_{q_{n-1}}]$ .

Аналогичным образом можно показать, что отрезки  $f^j((x_0, z_4])$ ,  $0 \leq j \leq q_n + q_{n-1} - 1$  покрывают точки излома  $f$  с " $q_n$ -прообразами" в  $E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cap (x_0, z_4]$  и с " $q_{n-1}$ -прообразами" в  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$  только один раз.

**III случай.** Мы сперва покажем, что подмножество  $\{x_0, x_{q_{n-1}}\}$  не может быть частью  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ . Предположим, что  $\{x_0, x_{q_{n-1}}\} \subset \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ . Тогда множество  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  покрывается одним отрезком  $I_{s_0+9}^{(n)}$  разбиения  $D_{s_0+9}^{(n)}$ . Следовательно  $\Delta_0^{(n-1)} \subset I_{s_0+9}^{(n)}$ . Ясно, что  $\ell(\Delta_0^{(n-1)}) \leq m_0^{-(s_0+9)} d_n$ . Отсюда следует, что  $\ell(\Delta_0^{(n)}) \geq (m_0^{(s_0+9)} - 1) \ell(\Delta_0^{(n-1)})$ . Теперь используя неравенство Данжуа получим, что  $\ell(\Delta_0^{(n)}) \leq e^v \ell(\Delta_0^{(n-1)})$ . Используя определение  $m_0$  легко можно показать, что  $m_0^{(s_0+9)} - 1 > e^v$ . Следовательно  $\ell(\Delta_0^{(n)}) > \ell(\Delta_0^{(n)})$ . Мы пришли к противоречию нашему предположению.

Предположим, что  $x_{q_n}, x_0 \in \tilde{E}_{s_0}^{(n)}$ . Из предположения и определения подмножеств  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$  и  $E_{s_0}^{(n)}(x_0)$  вытекает, что  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)} = E_{s_0}^{(n)}(x_0) = E_{s_0}^{(n)}(x_{q_n})$ .

Если  $\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_0))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) = 1$ , то найдется нетривиальное подмножество  $\tilde{E}_{s_0}^{(n)}$  разбиения  $G_{s_0}^{(n)}$  не содержащее точек  $x_{q_n}, x_0$  и  $x_{q_{n-1}}$ , т. е. мы приходим снова к первому случаю.

Пусть  $\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_0))\sigma(E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) \neq 1$ . Множество точек излома с  $q_n$ -прообразами в  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  разобьем на два непересекающиеся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ :

$V_1 = \{\bar{b} : \bar{b} \in E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}) \text{ и } f^j(\bar{b}) \text{ является точкой излома } f \text{ для некоторого } j, q_n - q_{n-1} \leq j \leq q_n - 1\}$

$V_2 = \{\bar{b} : \bar{b} \in E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}}) \text{ и } f^i(\bar{b}) \text{ является точкой излома } f \text{ для некоторого } i, 0 < i \leq q_n - q_{n-1} - 1\}$

Пусть  $I_{s_0+p}^{(n)}(x_0)$  и  $I_{s_0+p}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$ ,  $0 \leq p \leq 9$  отрезки  $s_0+p$ -го ранга покрывающие  $E_{s_0}^{(n)}(x_0)$  и  $E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  соответственно. В силу определения разбиения  $D_l^{(n)}$ :

$$\ell(I_{s_0+p}^{(n)}(x_0)) = \ell(I_{s_0+p}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) = d_n m_0^{-(s_0+p)}, \quad 0 \leq p \leq 9. \quad (3.3)$$

Используя лемму Данжуа получаем:

$$\ell(f^{q_n - q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}}))), \ell(f^{-q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}}))) < d_n m_0^{-(s_0+7)}. \quad (3.4)$$

Положим  $E_{s_0}^{(n)}(x_0, x_{q_{n-1}}) = E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cup f^{q_n - q_{n-1}}(V_1) \cup f^{-q_{n-1}}(V_2)$ . Очевидно, что  $E_{s_0}^{(n)}(x_0, x_{q_{n-1}}) \subset I_{s_0+9}^{(n)}(x_0) \cup f^{q_n - q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) \cup f^{-q_{n-1}}(I_{s_0+9}^{(n)}(x_{q_{n-1}})) = H_{s_0+9}^{(n)}$ . Отсюда, а также из (3.3) и (3.4) следует, что  $\ell(H_{s_0+9}^{(n)}) < 2d_n m_0^{-(s_0+7)}$ .

Теперь определим точки  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  следующим образом:

$$z_2 = \max E_{s_0}^{(n)}(x_0, x_{q_{n-1}}), z_1 = z_2 - 2d_n m_0^{-(s_0+6)}, z_3 = z_2 + 2d_n m_0^{-(s_0+4)}, z_4 = z_2 + d_n m_0^{-(s_0+4)} + d_n m_0^{-(s_0+6)}.$$

Мы покажем, что тройка отрезков  $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$  " $(K, M, \delta, \zeta; x_0)$ -правильно" покрывает точки излома  $f$  с " $q_n$ -прообразами" в  $E_{s_0}^{(n)}(x_0) \cup E_{s_0}^{(n)}(x_{q_{n-1}})$  и с числом  $r_n = q_n$ .

Мы покажем выполнения первого условия правильного покрытия. Остальные условия, легко можно проверить, как в первом случае. Отрезок  $[z_1, z_4]$  разобьем на две части:  $[z_1, z_4] = [z_1, x_0] \cup [x_0, z_4]$ . А систему отрезков  $\{f^i([z_1, x_0]), 0 \leq i \leq q_n - 1\}$  разобьем на две подсистемы:  $\{f^i([z_1, x_0]), 0 \leq i \leq q_{n-1} - 1\}$  и  $\{f^i([z_1, x_0]), q_{n-1} \leq i \leq q_n - 1\}$ .

Ясно, что первая система интервалов только один раз покрывает точки излома  $f$   $q_{n-1}$ -прообразы которых лежат в отрезке  $[x_{q_n}, x_0]$ , а также  $q_n$ -прообразы которых составляют подмножество  $V_1$ . Отметим, что точки излома  $f$  с  $q_n$ -прообразами в  $V_2$  покрывается второй системой отрезков только один раз.

Теперь рассмотрим систему отрезков  $\{f^i([x_0, z_4]), 0 \leq i \leq q_n - 1\}$ . Из определения  $z_4$  следует, что  $[x_0, z_4] \subset [x_0, x_{q_{n-1}}]$ . Для точки  $z_2$  возможны два случая:  $z_2 > x_0$  или  $z_2 \leq x_0$ . Если  $z_2 > x_0$  то точки излома с  $q_n$ -прообразами лежащими в  $[x_0, z_2]$ , покрывается системой отрезков  $\{f^i([x_0, z_4]), 0 \leq i \leq q_n - 1\}$  только один раз. В случае  $z_2 \leq x_0$ , отрезок  $[x_0, z_4]$  не содержит ни одного  $q_n$ -прообраза точек излома гомеоморфизма  $f$ . Теорема 3.1 доказана.

#### 4. Доказательство теоремы 1.4.

Мы приведем необходимые леммы и используя их, докажем теорему 1.1.

**Лемма 4.1.** Пусть в точке  $x = x_0$  поднятие  $\Phi(x)$  сопряжения  $\varphi$  имеет положительную производную  $\Phi'(x_0) = \omega_0 > 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$  и для некоторого  $R_1 > 1$  существует константа  $C_3 = C_3(R_1, \omega_0)$  такие, что для любых точек  $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ , лежащих в окрестности  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  и удовлетворяющих условиям

(i) отрезки  $[z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4]$  попарно  $R_1$ -соизмеримы,

(ii)  $\max(|z_1 - x_0|, |z_4 - x_0|) \leq R_1 \cdot |z_1 - z_2|$ ,

справедливо неравенство

$$|Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi) - 1| < C_3 \varepsilon.$$

**Доказательство леммы 4.1.** Предположим, что существует конечное производное поднятия  $\Phi$  в точке  $x_0$  и  $\Phi'(x_0) = \omega_0 > 0$ . По определению производной для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ , такое, что для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  имеют место неравенства

$$\omega_0 - \varepsilon < \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} < \omega_0 + \varepsilon. \quad (4.1)$$

Возьмем точки  $z_i \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , удовлетворяющие условиям (i), (ii) леммы 4.1. Для определенности предположим, что  $z_i < x_0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . В остальных случаях лемма 4.1 доказывается аналогично. При  $x = z_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , из (4.1) вытекает, что

$$(\omega_0 - \varepsilon)(x_0 - z_i) < \Phi(x_0) - \Phi(z_i) < (\omega_0 + \varepsilon)(x_0 - z_i). \quad (4.2)$$

Отсюда легко можно вывести следующие неравенства:

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_2) + (x_0 - z_1)}{z_2 - z_1} < \frac{\Phi(z_2) - \Phi(z_1)}{z_2 - z_1} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_2) + (x_0 - z_1)}{z_2 - z_1}, \quad (4.3)$$

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_3) + (x_0 - z_1)}{z_3 - z_1} < \frac{\Phi(z_3) - \Phi(z_1)}{z_3 - z_1} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_3) + (x_0 - z_1)}{z_3 - z_1}, \quad (4.4)$$

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_2)}{z_4 - z_2} < \frac{\Phi(z_4) - \Phi(z_2)}{z_4 - z_2} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_2)}{z_4 - z_2}, \quad (4.5)$$

$$\omega_0 - \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_3)}{z_4 - z_3} < \frac{\Phi(z_4) - \Phi(z_3)}{z_4 - z_3} < \omega_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - z_4) + (x_0 - z_3)}{z_4 - z_3}. \quad (4.6)$$

Из условий (i) и (ii) леммы 4.1 вытекает, что

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \max \left\{ \frac{x_0 - z_i}{z_2 - z_1}, \frac{x_0 - z_i}{z_3 - z_1}, \frac{x_0 - z_i}{z_4 - z_2}, \frac{x_0 - z_i}{z_4 - z_3} \right\} \leq K_1, \quad (4.7)$$

где константа  $K_1 > 1$  зависит лишь от  $R_1$  и не зависит от  $\varepsilon$ . Очевидно, что

$$Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi) = \frac{\Phi(z_2) - \Phi(z_1)}{z_2 - z_1} \frac{\Phi(z_4) - \Phi(z_3)}{z_4 - z_3} \frac{z_3 - z_1}{\Phi(z_3) - \Phi(z_1)} \frac{z_4 - z_2}{\Phi(z_4) - \Phi(z_2)}.$$

Отсюда, используя (4.3)-(4.7), нетрудно получить утверждение леммы 4.1. Лемма 4.1 доказана.

Определим в области  $\{(x, y) : x > 0, 0 \leq y \leq 1\}$  следующие функции

$$F_i(x, y) = \frac{[\sigma_i + (1 - \sigma_i)y](1 + x)}{\sigma_i + (1 - \sigma_i)y + x}, \quad i = \overline{1, k}.$$

**Лемма 4.2.** Пусть  $A = \prod_{s=1}^m \sigma_{i_s} \neq 1$ . Тогда существуют константы  $\Omega_0 > 1$  и  $\tau_0 \in (0, 1)$ , такие, что для всех  $x_s \geq \Omega_0$ ,  $y_s < \tau_0$ ,  $s = \overline{1, m}$  справедливо неравенство

$$\left| \prod_{s=1}^m F_{i_s}(x_s, y_s) - A \right| \leq \frac{|A - 1|}{4}. \quad (4.8)$$

**Доказательство леммы 4.2.** Перепишем  $\prod_{s=1}^m F_{i_s}(x_s, y_s)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^m F_{i_s}(x_s, y_s) &= \prod_{s=1}^m \frac{[\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s](1 + x_s)}{\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s + x_s} = \prod_{s=1}^m [\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s] \times \\ &\prod_{s=1}^m \frac{1 + x_s}{\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s + x_s} \equiv \Psi_1(y_1, \dots, y_m) \times \Psi_2(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Следующие соотношения

$$\lim_{y_s \rightarrow 0, s = \overline{1, m}} \Psi_1(y_1, \dots, y_m) = A, \quad \lim_{x_s \rightarrow \infty, s = \overline{1, m}} \Psi_2(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m) = 1$$

показывают, что когда переменные  $y_s, s = \overline{1, m}$ , равномерно близки к нулю функция  $\Psi_1 = \Psi_1(y_1, \dots, y_m)$  близка к  $A$  и  $\Psi_2 = \Psi_2(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_m)$  близка к 1, при больших значениях  $x_s, s = \overline{1, m}$ . Учитывая эти замечания и явный вид функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  оценим  $|\Psi_1 \Psi_2 - A|$ . Сперва оценим  $\Psi_1$ . Предположим, что  $0 \leq y_s \leq \tau_0 < 1$ . Константу  $\tau_0$  выберем позже. Ясно, что

$$|\Psi_1 - A| = \left| \prod_{s=1}^m [\sigma_{i_s} + (1 - \sigma_{i_s})y_s] - A \right| = \left| \prod_{s=1}^m \sigma_{i_s} + \sum_{s=1}^m \left[ (1 - \sigma_{i_s})y_s \prod_{p=1, p \neq s}^m \sigma_{i_p} \right] \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s_1, s_2=1, s_1 \neq s_2}^m \left[ (1 - \sigma_{i_{s_1}})(1 - \sigma_{i_{s_2}})y_{s_1}y_{s_2} \prod_{p=1, p \neq s_1, s_2}^m \sigma_{i_p} \right] + \dots + \prod_{s=1}^m (1 - \sigma_{i_s})y_s - A \leq \prod_{s=1}^m \sigma_{i_s} + \\
& + \sum_{s=1}^m \left[ |1 - \sigma_{i_s}|y_s \prod_{p=1, p \neq s}^m \sigma_{i_p} \right] + \sum_{s_1, s_2=1, s_1 \neq s_2}^m \left[ |1 - \sigma_{i_{s_1}}||1 - \sigma_{i_{s_2}}|y_{s_1}y_{s_2} \prod_{p=1, p \neq s_1, s_2}^m \sigma_{i_p} \right] + \dots + \\
& + \prod_{s=1}^m |1 - \sigma_{i_s}|y_s \leq \alpha_1 \tau_0 + \alpha_2 \tau_0^2 + \dots + \alpha_m \tau_0^m < C_4 \tau_0, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

где константа  $C_4 > 0$  зависит только от  $\sigma_{i_s}$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Положим  $\tau_0 = \min\{\frac{|A-1|}{8C_4}, 1\}$ . Отсюда, а также из (4.10) вытекает, что

$$|\Psi_1 - A| < \frac{|A-1|}{8} \tag{4.11}$$

при  $0 \leq y_s \leq \tau_0$ ,  $s = \overline{1, m}$ .

Теперь оценим  $|\Psi_2 - 1|$  при больших значениях  $x_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Используя явный вид  $\Psi_2$  легко можно показать, что для всех  $y_s$ ,  $0 \leq y_s \leq 1$  и  $x_s > 0$ ,  $s = \overline{1, m}$ ,  $|\Psi_2 - 1| \leq R_2 \sum_{s=1}^m \frac{1}{x_s}$ , где константа  $R_2$  не зависит от  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и  $y_1, y_2, \dots, y_m$ .

Пусть  $x_s \geq \Omega_0 > 0$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Тогда  $|\Psi_2 - 1| \leq R_2 m \frac{1}{\Omega_0}$ . Отсюда, а также из (4.11) вытекает, что  $|\Psi_1 \Psi_2 - A| \leq \frac{|A-1|}{8} + (A + \frac{|A-1|}{8})R_2 m \frac{1}{\Omega_0}$  при  $0 \leq y_s \leq \tau_0$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Выберем  $\Omega_0$  так, чтобы выполнялось соотношение  $\frac{|A-1|}{8} + (A + \frac{|A-1|}{8})R_2 m \frac{1}{\Omega_0} = \frac{|A-1|}{4}$ . Очевидно, что  $\Omega_0 = \frac{(8A+|A-1|)R_2 m}{|A-1|}$ . В итоге получаем:  $|\Psi_1 \Psi_2 - A| \leq \frac{|A-1|}{4}$  при  $0 \leq y_s \leq \tau_0$  и  $x_s \geq \Omega_0$ ,  $s = \overline{1, m}$ .

Отсюда, а также из (4.9) вытекает утверждение леммы 4.2.

**Лемма 4.3.** *Предположим, что гомеоморфизм  $f$  удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Пусть  $x_0 \in S^1$ ,  $\delta > 0$  и  $\hat{B} = \{b(i_s), s = \overline{1, m}\}$  нетривиальное подмножество особых точек  $f$ . Тогда существуют константы  $M_0 > 1$ ,  $\zeta_0 \in [0, 1]$  и  $K_0(M_0, \zeta_0) > M_0$ , такие, что для любой тройки отрезков  $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ , " $(K_0, M_0, \zeta_0, \delta; x_0)$ -правильно" покрывающей подмножество  $\hat{B}$ , при достаточно больших  $n$  имеет место следующее неравенство*

$$|Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) - 1| \geq R_3,$$

где константа  $R_3 > 0$  зависит лишь от  $f$ .

**Доказательство леммы 4.3.** По определению "правильного" покрытия,  $z_2 = \bar{b}^{(n)}(i_t)$  и  $\bar{b}^{(n)}(i_s) \in [z_1, z_2)$ ,  $s = \overline{1, m}$ ,  $s \neq t$ . Перепишем  $Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n})$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Dist(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) &= \prod_{s=1}^m Dist(f^{l_{i_s}}(z_1), f^{l_{i_s}}(z_2), f^{l_{i_s}}(z_3), f^{l_{i_s}}(z_4); f) \times \\
&\times \prod_{i=0, i \neq l_{i_s}, s=\overline{1, m}}^{r_n-1} Dist(f^i(z_1), f^i(z_2), f^i(z_3), f^i(z_4); f). \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Из утверждения леммы 2.4 и определения функций  $F_i(x, y)$  вытекает, что

$$Dist(f^{l_{i_t}}(z_1), f^{l_{i_t}}(z_2), f^{l_{i_t}}(z_3), f^{l_{i_t}}(z_4); f) = \frac{\sigma_{i_t}(1 + \xi(l_{i_t}))}{\sigma_{i_t} + \xi(l_{i_t})} + \psi_t = F_{i_t}(\xi(l_{i_t}), 0) + \psi_t,$$

$$\begin{aligned} \text{Dist}(f^{l_{is}}(z_1), f^{l_{is}}(z_2), f^{l_{is}}(z_3), f^{l_{is}}(z_4); f) &= \frac{[\sigma_{is} + (1 - \sigma_{is})z^{(is)}(l_{is})](1 + \xi(l_{is}))}{\sigma_{is} + (1 - \sigma_{is})z^{(is)}(l_{is}) + \xi(l_{is})} + \psi_s = \\ &= F(\xi(l_{is}), z^{(is)}(l_{is})) + \psi_s, \quad s = \overline{1, m}, s \neq t, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\text{где } |\psi_s| \leq C_2 \int_{F^{l_{is}}(\hat{z}_1)}^{F^{l_{is}}(\hat{z}_4)} |F''(y)| dy, \quad s = \overline{1, m}.$$

Сперва оценим первый сомножитель в (4.12). В силу условия  $F'' \in L_1(S^1, d\ell)$ , функция  $\int_0^x |F''(y)| dy$  абсолютно непрерывна на  $S^1$ . По построению  $[z_1, z_4]$  является " $q_n$ -маленьким". Кроме того, отрезки  $\{f^j([z_1, z_4])\}$ ,  $j = \overline{0, r_n - 1}$  попарно не пересекаются  $r_n \in \{q_{n-1}, q_n, q_n + q_{n-1}\}$ . Отсюда, используя утверждение леммы 2.1 получим, что

$$\ell(f^j([z_1, z_4])) \leq \text{const} \lambda^n, \quad j = \overline{0, r_n - 1}. \quad (4.14)$$

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Существует  $N = N(\varepsilon) \geq 1$ , такое, что при  $n \geq N$  справедливо следующее неравенство

$$\int_{F^{l_{is}}(\hat{z}_1)}^{F^{l_{is}}(\hat{z}_4)} |F''(y)| dy < \varepsilon, \quad s = \overline{1, m}. \quad (4.15)$$

Рассмотрим константы  $\Omega_0 > 1$  и  $\tau_0 \in (0, 1)$  определяемые леммой 4.2. Положим  $A = \prod_{b(i_s) \in \hat{B}} \sigma_{i_s}$ . Мы потребуем, чтобы  $\xi(0)$  и  $z^{(is)}(0)$ ,  $s = \overline{1, m}$  удовлетворяли следующим соотношениям:  $\xi(0) > \Omega_0 e^v$ ,  $z^{(is)}(0) < \tau_0 e^{-v}$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Отсюда, используя соотношения (3.2) получим, что  $\xi(l_{is}) > \Omega_0$  и  $z^{(is)}(l_{is}) < \tau_0$ ,  $s = \overline{1, m}$ .

Положим,  $M_0 = \Omega_0 e^v$  и  $\zeta_0 = \tau_0 e^{-v}$ . Из утверждение леммы 4.2 вытекает, что

$$|F_{i_t}(\xi(l_{i_t}), 0) \cdot \prod_{s=1, s \neq t}^m F_{i_s}(\xi(l_{i_s}), z^{(is)}(l_{i_s})) - A| \leq \frac{|A - 1|}{8} \quad (4.16)$$

при  $\xi(0) > M_0$  и  $z^{(is)}(0) < \zeta_0$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Собирая вместе (4.13)-(4.16) получим, что

$$|[F_{i_t}(\xi(l_{i_t}), 0) + \psi_t] \prod_{s=1, s \neq t}^m [F_{i_s}(\xi(l_{i_s}), z^{(is)}(l_{i_s})) + \psi_s] - A| \leq \frac{|A - 1|}{4} \quad (4.17)$$

при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ .

Теперь оценим второй сомножитель в (4.12). Используя разложения (2.3) и теорему 2.1 получим, что

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{i=0, i \neq l_{is}, s=\overline{1, m}}^{r_n-1} \text{Dist}(f^i(z_1), f^i(z_2), f^i(z_3), f^i(z_4); f) - 1 \right| \leq C_5 \sum_{i=0}^m (\ell([f^i(z_1), f^i(z_4)]) \times \\ & \times \max_{x, t \in [f^i(z_1), f^i(z_4)]} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t)|) + C_5 \sum_{i=0}^{r_n-1} \int_{F^i(\hat{z}_1)}^{F^i(\hat{z}_4)} |\theta(y)| dy + C_5 \sum_{i=0}^{r_n-1} \left( \int_{F^i(\hat{z}_1)}^{F^i(\hat{z}_4)} |F''(y)| dy \right)^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

где константа  $C_5 > 0$  зависит лишь от  $f$ .

Отметим, что функции  $\int_0^x |F''(y)|dy$  и  $g_\varepsilon(x)$  равномерно непрерывны на  $S^1$ . Выберем  $\delta = \delta(\varepsilon)$  так, что следующие соотношения

$$\int_t^x |F''(y)|dy < \varepsilon, \quad |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t)| < \varepsilon \quad (4.19)$$

выполняются, при любых  $x, t \in S^1$  и  $\ell([t, x]) < \delta$ . В силу (4.14), существует  $N_1 = N_1(\varepsilon) > 1$ , такое, что при каждом  $n \geq N_1$ , справедливо  $\ell(f^i([z_1, z_2])) \leq \delta$ ,  $i = \overline{0, r_n - 1}$ . Если  $x, t \in [f^i(z_1), f^i(z_1)]$ , при некотором  $i$ ,  $i = \overline{0, r_n - 1}$ , то в силу (4.19),  $\int_t^x |F''(y)|dy < \varepsilon$ ,  $|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ . Напомним, что  $\int_{S^1} |\theta(y)|dy < \varepsilon$ . Отсюда, а также из (4.18) следует, что

$$\left| \prod_{i=0, i \neq l_{i_s}, s=\overline{1, m}}^{r_n-1} \text{Dist}(f^i(z_1), f^i(z_2), f^i(z_3), f^i(z_4); f) - 1 \right| \leq (2 + \|F''\|_{L_1}) C_5 \varepsilon.$$

Из (4.12), (4.13), (4.17), а также из последнего соотношения вытекает утверждение леммы 4.3.

**Доказательство теоремы 1.4.** Пусть гомеоморфизм  $f$  удовлетворяет условиям теоремы 1.4. Поскольку число вращения  $\rho_f$  иррационально, инвариантная мера  $\mu$  не имеет атомов и сопряжение  $\varphi(x)$  задается монотонной функцией,  $\varphi(x) = \int_0^x d\mu(t)$ ,  $x \in S^1$ . Производная поднятия  $\Phi'(x)$  существует в силу монотонности функции  $\Phi$  для почти всех  $x$  по мере Лебега.

Мы покажем, что  $\Phi'(x) = 0$  почти по мере Лебега. Предположим, что  $\Phi'(x_0) = \omega_0 > 0$ ,  $x_0 \in S^1$ . Поскольку траектория любой точки  $x_0 \in S^1$  имеет лебегову меру нуль не ограничивая общности можно считать, что  $x_0 \neq 0$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Положим  $d(x_0) = \min\{x_0, 1 - x_0\}$ . Пусть  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) \in (0, d(x_0))$ . Возьмем тройку отрезков  $[z_s, z_{s+1}] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , удовлетворяющих условиям "правильного" покрытия. Тогда эти отрезки и отрезки  $[f^{r_n}(z_s), f^{r_n}(z_{s+1})]$ ,  $s = 1, 2, 3$  удовлетворяют условиям леммы 4.1. Из леммы 4.1 следует, что

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; \varphi) - 1| \leq C_6 \varepsilon, \quad (4.13)$$

$$|\text{Dist}(f^{r_n}(z_1), f^{r_n}(z_2), f^{r_n}(z_3), f^{r_n}(z_4); \varphi) - 1| \leq C_6 \varepsilon. \quad (4.21)$$

Поскольку  $\varphi$  осуществляет сопряжение с линейным поворотом, нетрудно видеть, что

$$Cr(\varphi(f^{r_n}(z_1)), \varphi(f^{r_n}(z_2)), \varphi(f^{r_n}(z_3)), \varphi(f^{r_n}(z_4))) = Cr(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)). \quad (4.22)$$

Из формул (4.20) - (4.22) непосредственно вытекает, что

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) - 1| \leq C_7 \varepsilon, \quad (4.23)$$

где константа  $C_7 > 0$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $n$ . С другой стороны, из леммы 4.3 следует, что для достаточно больших  $n$

$$|\text{Dist}(z_1, z_2, z_3, z_4; f^{r_n}) - 1| \geq R_2 > 0.$$

При достаточно малых  $\varepsilon$  последнее неравенство и неравенство (4.23) одновременно не могут выполняться. Это противоречие доказывает теорему 1.4.

**Благодарности.** Авторы выражают свою благодарность К.М. Ханину и А.Теплинскому за полезные обсуждения. Первый автор (А.А.Д) благодарить Фонд Исследований Германии (German Research Foundation (DFG)) за частичную финансовую поддержку. (грант GZ: MA 633/20-1, AOJB: 550185).

## Список литературы

- [1] Denjoy A.: Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J. Math. Pures Appl., **11**, 333-375 (1932).
- [2] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.: Эргодическая теория, М. Наука, 1980.
- [3] Arnol'd V. I.: Small denominators: I. Mappings from the circle onto itself. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **25**, 21-86 (1961).
- [4] Herman M.: Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **49**, 225-234 (1979).
- [5] Katznelson Y., Ornstein D.: The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **9**, 681-690 (1989).
- [6] Синай Я.Г., Ханин К.М. Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами. УМН, 44, **265**(1), 57-81 (1989).
- [7] Moser, J.: A rapid convergent iteration method and non-linear differential equations. II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20**(3), 499-535 (1966).
- [8] Yoccoz J. C.: Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. C. R. Acad. Sci. Paris T., **298**(7), 141-144 (1984).
- [9] Теплинский А.Ю., Ханин К.М.: Жёсткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями. УМН, **59**(2), 329-353 (2004).
- [10] Khanin K.M., Vul E.B.: Circle homeomorphisms with weak discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, **3**, 57-98 (1993).
- [11] Джалилов А.А., Ханин К.М.: Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. Функ.анал. и его прил. **32**(3), 11-21 (1998).
- [12] Stein M.: Groups of piecewise linear homeomorphisms. Trans. A.M.S. **32**, 477-514 (1992).
- [13] Herman M.: Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant. Conf. on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund, vol. II, 707-725 (1981)
- [14] Dzhililov A.A., Liousse I.: Circle homeomorphisms with two break points. Nonlinearity, **19**, 1951-1968 (2006).
- [15] Dzhililov A.A., Liousse I., Mayer D.: Singular measures of piecewise smooth circle homeomorphisms with two break points. Discrete and Continuous Dynamical Systems, **24**(2), 381-403 (2009).
- [16] Синай Я.Г.: Современные проблемы эргодической теории. Москва, Издательская фирма "Физико-математическая литература" (1995).
- [17] Swiatek G.: Rational rotation numbers for maps of the circle. Commun. Math. Phys. **119**(1), 109-128 (1988).



# КУСОЧНО - ГЛАДКИЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ ОКРУЖНОСТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ИЗЛОМАМИ

А.А. Джалилов, Д. Майер, У.А. Сафаров

## АННОТАЦИЯ

Рассмотрим гомеоморфизм окружности  $f \in C^1(S^1 \setminus \{b(1), b(2), \dots, b(k)\})$  с изломами в точках  $b(i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , т. е. производная  $f'$  его поднятия  $F : R \rightarrow R$  имеет разрывы в точках  $\widehat{b}(i)$ ,  $i = \overline{1, k}$  являющиеся образующими для  $b(i)$  в интервале  $[0, 1)$ , и иррациональным числом вращения  $\rho_f$ . Пусть  $F'$  абсолютно непрерывна на каждом связном отрезке множества  $[0, 1) \setminus \{\widehat{b}(i), i = \overline{1, k}\}$  и  $F'' \in L_1([0, 1], d\ell)$ ,  $\ell$ - мера Лебега на окружности. Предположим, что произведение величин изломов  $F'$  в точках излома нетривиален т. е.  $\prod_{i=1}^k \frac{F'(b(i)-0)}{F'(b(i)+0)} \neq 1$ . Мы докажем, что  $f$ -инвариантная вероятностная мера  $\mu_f$  является сингулярной относительно меры Лебега  $\ell$ .

# Piecewise-smooth circle homeomorphisms with several break points

A.A. Dzhalilov, D. Mayer and U.A. Safarov

## ABSTRACT

Consider circle homeomorphism  $f \in C^1(S^1 \setminus \{b(1), b(2), \dots, b(k)\})$  with break points  $b(i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , i. e. the derivative  $f'$  of its lift  $F : R \rightarrow R$  has discontinuities at the points  $\widehat{b}(i)$ ,  $i = \overline{1, k}$  which are the representative points of  $b(i)$  in the interval  $[0, 1)$ , and irrational rotation number  $\rho_f$ . Let  $F'$  be absolutely continuous on every connected interval of the set  $[0, 1) \setminus \{\widehat{b}(i), i = \overline{1, k}\}$  and  $F'' \in L_1([0, 1], d\ell)$ . Suppose that the product of the jump ratios of  $F'$  at the break points is nontrivial, i. e.  $\prod_{i=1}^k \frac{F'(b(i)-0)}{F'(b(i)+0)} \neq 1$ . We prove that the  $f$ -invariant probability measure  $\mu_f$  is then singular with respect to Lebesgue measure  $\ell$ .

Ахтам Абдурахманович Джалилов  
Профессор механико-математического факультета  
Самаркандского гос. университета

Адрес:

Узбекистан  
г. Самарканд, 703004  
Университетский бульвар, 15  
Самаркандский Государственный Университет,  
Механико-математический факультет  
проф. А. А. Джалилов  
E-mail: ahtam21@rambler.ru

Address:

Akhtam Abdurahmanovich Dzhaliylov  
Mechanics and Mathematics Faculty  
of Samarkand State University  
Boulevard st. 15  
140104 Samarkand  
Uzbekistan  
E-mail: ahtam21@rambler.ru

Джалилов Ахтам Абдурахманович

**Паспортные данные:** СЕ 2631735, выдан 19.03.2008,  
3-ым Отделением Милиции города Самаканда.

**Дата рождения:** 21.07.1956.

**Адрес:** Узбекистан г. Самарканд, 703004,  
г. Самарканд, ул. Лолазор. 38.

**Полное название научного учреждения:** Самаркандский  
Государственный Университет, им. А. Навои.

**Почтовый адрес:** Узбекистан 140104, г. Самарканд,  
Самаркандский госуниверситет, Университетский бульвар, д. 15.

**Номер телефон:** (+99866)-237-24-45.

**E-mail:** ahtam21@rambler.ru

**Ответственной за переписку:** Джалилов Ахтам Абдурахманович.

Дитер Майер

**Дата рождение:** 12.10.1943.

**Полное название научного учреждения:** Клаустальский  
Институт Теоретической Физики.

**Почтовой адрес:** Германия  
Клаусталь Зоммерфельд, Д-38678  
ул.Арнольд-Зоммерфельд, 6.

**Номер телефон:** (0 53 23) 72-3004.

**E-mail:** dieter.mayer@tu-clausthal.de

Дитер Майер  
Профессор Клаустальского Института  
Теоретической Физики

Address:  
Prof. Dieter Mayer  
Institut für Theoretische Physik  
TU Claustal Arnold-Sommerfeld Str.6  
D-38678 Claustal-Sommerfeld  
Germany  
E-mail: dieter.mayer@tu-clausthal.de

Уткир Авляярович Сафаров

**Дата рождения:** 10.04.1983.

**Адрес:** Узбекистан г. Самарканд, 140104,  
г. Самарканд, ул. Узбекистанская. 11.

**Полное название научного учреждения:** Самаркандский  
Государственный Университет, им. А. Навои.

**Почтовый адрес:** Узбекистан 140104, г. Самарканд,  
Самаркандский госуниверситет, Университетский бульвар, д. 15.

**Номер телефон:** (+99893)-994-44-83.

**E-mail:** safarovua@mail.ru

Уткир Авлаярович Сафаров  
Ассистент механико-математического факультета  
Самаркандского гос. университета

Адрес:

Узбекистан  
г. Самарканд, 140104  
Университетский бульвар, 15  
Самаркандский Государственный Университет,  
Механико-математический факультет  
асс. У.А. Сафаров  
E-mail: safarovua@mail.ru

Address:

Utkir Avlayarovich Safarov  
Mechanics and Mathematics Faculty  
of Samarkand State University  
Boulevard st. 15  
140104 Samarkand  
Uzbekistan  
E-mail: safarovua@mail.ru